

## Tentamen van Wiskunde 2, 4 maart 2002, 18:30-21:30 uur

Schrijf je naam + student nummer op ieder vel. Bij elke vraag wordt argumentatie verwacht.  
Alleen “ja”, “nee” of “42” volstaat niet.

### Opgave 1:

Gegeven is de matrix  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & -3 \\ 2 & -6 & 18 \\ 5 & 2 & 11 \end{pmatrix}$ .

- Vind de rang van  $A$ .
- Geef de volledige oplossing van:  $Ax = (1, -1, 8, 3)^t$ .
- De transformatie  $T$  heeft als matrixvoorstelling  $B = A^t \cdot A \cdot A^t$ . Is  $T$  surjectief en/of injectief?

### Opgave 2:

- Vind de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking  $y'' + 2y' - 8y = 0$ .
- Laat  $V = C([0, 1], \mathbb{R})$  met het inproduct  $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$  zijn. Vind een orthogonale basis van de in a) gevonden ruimte van oplossingen.
- Vind de oplossing van  $y'' + 2y' - 8y = 4 \cos 2t$ ,  $y(0) = \frac{1}{2}$ ,  $y'(0) = \frac{3}{5}$ .

### Opgave 3:

Neem  $V = C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  en laat  $T : V \rightarrow V$  de transformatie zijn gedefinieerd door  $(Tf)(x) = f(x+3)$ .

- Toon aan dat  $T$  lineair is en inverteerbaar.
- Laat zien dat  $W = P_2(\mathbb{R})$  een invariante deelruimte is onder  $T$ . Wat zijn de eigenwaarden van  $T|_W$ ?
- Laat  $A$  de matrixvoorstelling zijn van  $T|_W$  ten opzichte van de basis  $\{1, x, x^2\}$ . Bereken  $A$ . Is  $A$  diagonaliseerbaar?
- Geef een formule voor  $A^n$ .

### Opgave 4:

Een veehouder heeft 2 biggen, 3 geitjes en 2 kalveren. Na elk jaar brengt hij de verkregen varkens, koeien en geiten naar de markt, waar hij z'n vee inruilt tegen de koers:

- 1 varken voor 1 big en 2 kalveren,
- 1 koe voor 2 biggen, 3 kalveren en 2 geitjes,
- 1 geit voor 2 kalveren en 1 geitje.

- Stel een model op van dit voorval (in termen van overgangsmatrix).
- Met welke factor neemt de veestapel (asymptotisch) per jaar toe?
- Wat is de asymptotische verhouding varkens:geiten:koeien als de veehouder nooit capaciteitsproblemen kent.